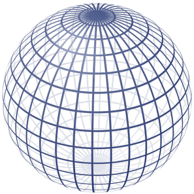
Volume d'hypersurfaces nodales aléatoires

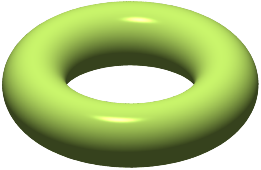
Thomas Letendre (ICJ – UMPA)

Journée de l'équipe AGL
Saint Étienne – 21 janvier 2016

Géométrie aléatoire

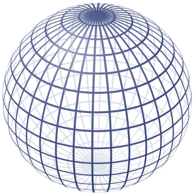
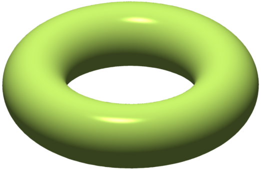
(M, g) variété riemannienne, fermée, de dimension n.
La métrique g induit une mesure de Lebesgue sur M.





Géométrie aléatoire

(M, g) variété riemannienne, fermée, de dimension n.
La métrique g induit une mesure de Lebesgue sur M.


Question

On choisit une hypersurface de M “au hasard”. Que peut-on dire de sa géométrie (volume, courbure) ou de sa topologie (nombre de composantes connexes, nombres de Betti, caractéristique d'Euler) ?

On cherche une réponse statistique : moyenne, moments, loi . . .

Polynômes aléatoires

Sur $\mathbb{C}$, un polynôme de degré d a d racines, génériquement simples.

Question

Combien un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ a-t-il de racines réelles ?

Polynômes aléatoires

Sur $\mathbb{C}$, un polynôme de degré d a d racines, génériquement simples.

Question

Combien un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ a-t-il de racines réelles ?

Théorème (Kac, 1943)

Soit $P_d = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ *avec* a_i *des v.a.i.i.d. gaussiennes centrées réduites et* $Z_d = (P_d)^{-1}(0)$, *alors*

$$\mathbb{E}[\mathrm{card}\,(Z_d)] \sim \frac{2}{\pi}\ln(d).$$

Théorème (Kostlan, 1993)

Si on choisit a_i *de variance* $\binom{d}{i}$, *on a* $\mathbb{E}[\mathrm{card}\,(Z_d)] = \sqrt{d}$.

Variables gaussiennes

$(V, \langle \cdot\,,\cdot \rangle)$ euclidien de dimension N,
Λ auto-adjoint et défini positif.

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans V est gaussienne, centrée, de variance Λ, si sa loi admet la densité :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\sqrt{\det(\Lambda)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle \Lambda^{-1}x\,,x\right\rangle\right)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $X \sim \mathcal{N}(\Lambda)$.

Si X est réduite ($\Lambda = \mathrm{Id}$), alors dans toute base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$, $X = \sum a_i e_i$ avec $(a_1, \dots, a_n)$ des v.a.i.i.d réelles de loi $\mathcal{N}(1)$.

Espaces propres du laplacien

(M, g) variété riemannienne. La mesure riemannienne $|\mathrm{d}V_M|$ définit un produit scalaire L^2 sur $\mathcal{C}^\infty(M)$:

$$\langle \varphi , \psi \rangle = \int_M \varphi \psi \, |\mathrm{d}V_M| \, .$$

On note Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami (dans $\mathbb{R}^n$, $\Delta = -\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$).

Faits classiques

- Les valeurs propres de Δ forment une suite strictement croissante : $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \cdots$, et $\lambda_k \to +\infty$.
- Les espaces propres $\ker(\Delta - \lambda_k \,\mathrm{Id}) \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ sont de dimension finie.
- $\bigoplus_{k \geqslant 0} \ker(\Delta - \lambda_k \,\mathrm{Id})$ est dense dans $L^2(M)$.

Hypersurfaces nodales aléatoires

Pour $\lambda \geqslant 0$, on note $V_\lambda = \bigoplus_{\lambda_k \leqslant \lambda} \ker(\Delta - \lambda_k \,\mathrm{Id})$.

Définition

Soit f_λ un vecteur gaussien $\mathcal{N}(\mathrm{Id})$ dans V_λ et $Z_\lambda = (f_\lambda)^{-1}(0)$.
On dit que Z_λ est une hypersurface nodale aléatoire.

Hypersurfaces nodales aléatoires

Pour $\lambda \geqslant 0$, on note $V_\lambda = \bigoplus_{\lambda_k \leqslant \lambda} \ker(\Delta - \lambda_k \,\mathrm{Id})$.

Définition

Soit f_λ un vecteur gaussien $\mathcal{N}(\mathrm{Id})$ dans V_λ et $Z_\lambda = (f_\lambda)^{-1}(0)$.
On dit que Z_λ est une hypersurface nodale aléatoire.

Théorème (Bérard, 1985)

Pour tout $\lambda \geqslant 0$, Z_λ est presque surement une hypersurface lisse.
De plus, on a

$$\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_\lambda)] = \sqrt{\frac{\lambda}{n+2}}\,\mathrm{Vol}(M)\,\frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)} + O(1)\,,$$

lorsque $\lambda \to +\infty$.

Sur le cercle euclidien $\mathbb{S}^1$

$\Delta = -\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ et les fonctions propres satisfont : $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \lambda\varphi = 0.$

- Les valeurs propres sont les k^2 avec $k \in \mathbb{N}$.
- L'espace propre associé à k^2 est engendré par $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$.
- V_λ est l'espace des polynômes trigonométriques de degré $\leqslant \sqrt{\lambda}$.
- $$f_\lambda : \theta \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor} a_k\cos(k\theta) + b_k\sin(k\theta)\right),$$

  où les a_k et b_k sont des v.a.i.i.d. $\mathcal{N}(1)$.

Théorème (Bérard, 1985)

Lorsque $\lambda \to +\infty$, $\qquad \mathbb{E}[\mathrm{card}(Z_\lambda)] = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\lambda} + O(1).$

Fonction spectrale et fonction de corrélation

Fonction spectrale du laplacien

Soit Π_λ la projection orthogonale sur V_λ, il existe une unique fonction $e_\lambda : M \times M \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\Pi_\lambda(\varphi)(x) = \langle e_\lambda(x, \cdot), \varphi \rangle = \int_{y \in M} e_\lambda(x, y) \varphi(y) \, |\mathrm{d}V_M| \, .$$

Si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ est une base orthonormée de V_λ,

$$e_\lambda(x, y) = \sum \varphi_i(x) \varphi_i(y).$$

Fonction spectrale et fonction de corrélation

Fonction spectrale du laplacien

Soit Π_λ la projection orthogonale sur V_λ, il existe une unique fonction $e_\lambda : M \times M \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\Pi_\lambda(\varphi)(x) = \langle e_\lambda(x, \cdot)\,, \varphi \rangle = \int_{y \in M} e_\lambda(x,y)\varphi(y)\,|\mathrm{d}V_M|\,.$$

Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ est une base orthonormée de V_λ,

$$e_\lambda(x,y) = \sum \varphi_i(x)\varphi_i(y).$$

Fonction de corrélation

Le vecteur gaussien centré réduit $f_\lambda \in V_\lambda$ définit un processus gaussien centré $(f_\lambda(x))_{x \in M}$.

Il est caractérisé par sa fonction de corrélation : $(x,y) \mapsto \mathbb{E}[f_\lambda(x) f_\lambda(y)]$.

La fonction de corrélation

Lemme

Pour tout x et $y \in M$, $\mathbb{E}[f_\lambda(x)f_\lambda(y)] = e_\lambda(x,y)$.

Démonstration.

Dans une base orthonormée $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, on a $f_\lambda = \sum a_i \varphi_i$ où les a_i sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(1)$.

$$\mathbb{E}[f_\lambda(x)f_\lambda(y)] = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant N} \mathbb{E}[a_i a_j]\,\varphi_i(x)\varphi_i(y) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x)\varphi_i(y) = e_\lambda(x,y).$$

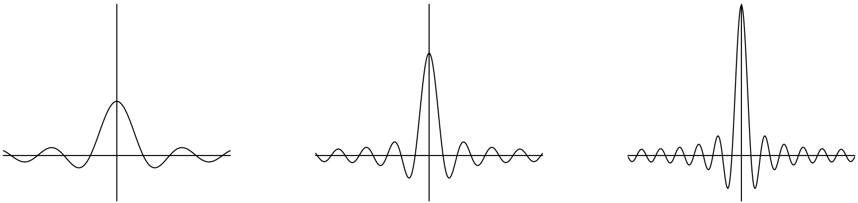
□

En dérivant sous l'intégrale :

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i}(x)f_\lambda(y)\right] = \frac{\partial e_\lambda}{\partial x_i}(x,y).$$

Sur le cercle

C'est le noyau de Dirichlet : $e_\lambda(x,y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left((\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor + \frac{1}{2})(x-y)\right)}{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}$.



(a) $\lambda = 16$ (b) $\lambda = 64$ (c) $\lambda = 144$

FIGURE: Le noyau de Dirichlet

On a une échelle caractéristique : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, et une limite d'échelle :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} e_\lambda\left(x, x + \frac{h}{\sqrt{\lambda}}\right) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(h)}{h}.$$

Une heuristique

Sur M quelconque, on a toujours une échelle caractéristique $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ et une limite d'échelle.

On découpe M en boîtes de taille $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$:

$$\simeq \mathrm{Vol}(M)\,\lambda^{\frac{n}{2}} \text{ boîtes.}$$

Les boîtes sont indépendantes, et il se passe la même chose dans chacune : même proba que Z_λ est une géométrie donnée dans cette boîte.

Composantes de taille $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, donc volume de l'ordre de $\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{n-1}{2}}$.
Finalement $\mathrm{Vol}(Z_\lambda)$ est proportionnel à $\mathrm{Vol}(M)\,\sqrt{\lambda}$.

Idée de la preuve

Formule de Kac-Rice

$$\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_\lambda)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x\in M} \frac{1}{\sqrt{e_\lambda(x,x)}} \mathbb{E}\left[\|d_x f_\lambda\| \;\middle|\; f_\lambda(x) = 0 \right] |\mathrm{d}V_M| \, .$$

On peut exprimer $\mathbb{E}\left[\|d_x f_\lambda\| \;\middle|\; f_\lambda(x) = 0 \right]$ en fonction de e_λ et de ses dérivées.

Idée de la preuve

Formule de Kac-Rice

$$\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_\lambda)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x\in M} \frac{1}{\sqrt{e_\lambda(x,x)}} \mathbb{E}\left[\|d_x f_\lambda\| \;\middle|\; f_\lambda(x) = 0 \right] |\mathrm{d}V_M| \,.$$

On peut exprimer $\mathbb{E}\left[\|d_x f_\lambda\| \;\middle|\; f_\lambda(x) = 0 \right]$ en fonction de e_λ et de ses dérivées.

Théorème (Hörmander, 1968 – Bin, 2004)

- $e_\lambda(x,x) = C_n \lambda^{\frac{n}{2}} + O\left(\lambda^{\frac{n-1}{2}}\right)$,
- $\partial_{x_i} e_\lambda(x,x) = O\left(\lambda^{\frac{n}{2}}\right)$,
- $\partial_{x_i}\partial_{y_j} e_\lambda(x,x) = \delta_{ij} C_n' \lambda^{\frac{n+2}{2}} + O\left(\lambda^{\frac{n+1}{2}}\right)$.

Autres résultats

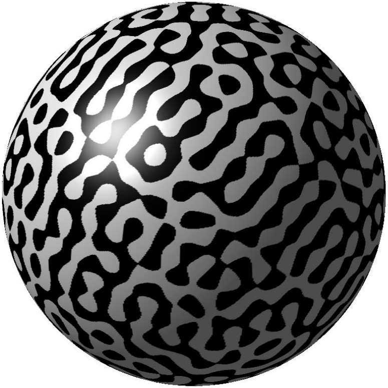
- En tant que mesures : $\sqrt{\frac{n+2}{\lambda}}\mathbb{E}[Z_\lambda] \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^n)}\,|\mathrm{d}V_M|$, (Zelditch, 2009).
- Sur $\mathbb{S}^2$, $\mathrm{Var}(\mathrm{Vol}(Z_\lambda)) \sim C\ln(\lambda)$, (Wigman, 2010).
- Moyenne des nombres de Betti de Z_λ : encadrement d'ordre $\lambda^{\frac{n}{2}}$, (Gayet – Welschinger, 2014).
- Sous-variétés de codimension r, (L., 2014) :

$$\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_\lambda)] \sim C_{n,r}\lambda^{\frac{r}{2}}\,\mathrm{Vol}(M)\,,$$

$$\text{si } (n-r) \text{ est pair,} \qquad \mathbb{E}[\chi(Z_\lambda)] \sim (-1)^{\frac{n-r}{2}}\,C'_{n,r}\lambda^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{Vol}(M)\,.$$

- Asymptotique d'ordre $\lambda^{\frac{n}{2}}$ pour la moyenne du cycle conormal de Z_λ, (Rivière – Dang, 2015).

Merci de votre attention.



Domaines nodaux aléatoires.
Source : page personnelle de Alex H. Barnett,
`https://math.dartmouth.edu/~ahb/rpws/`.